数理解析研究所講究録
1137 巻 2000 年 9-18

Ring homomorphisms on commutative Banach Algebras II

新潟大学大学院　自然科学研究科　　三浦　毅
(Tsuyoshi Miura)

可換 Banach 環上の環準同型写像の構造は一般には複雑であることが知られている．実際，複素数の全体からなる可換 Banach 環 $\mathbb{C}$ 上の環準同型写像には，各点で不連続なものが数多く存在する (cf. [2])．しかしながら，ある特別な条件の下では環準同型写像の構造は非常に簡単な形をしている．例えば，対合をもつ可換 Banach 環上の $*$-環準同型写像や，正則な可換 Banach 環上の全射環準同型写像の構造は知られている ([3, 4, 5])．この論文ではこれら両方の結果を含むような，より一般の環準同型写像の構造を決定することを試みる．まずは上述の結果を述べるために，いくつかの定義を必要とする．

定義 1 A を可換 Banach 環とする．A が根基環であるとは，A 上の複素数値準同型写像が 0 だけであることをいう．このとき A の根基を $\mathrm{rad}A$ で表わし，$\mathrm{rad}A = A$ で定義する．A が根基環でないとき，A の根基 $\mathrm{rad}A$ を A の正則極大イデアル全体の共通部分により定義する．

定義 2 A, B をそれぞれ対合 $*, \star$ をもつ可換 Banach 環とする．$\rho\colon A \to B$ が $*$-環準同型写像であるとは，任意の $f \in A$ に対して

$$\rho(f^*) = \rho(f)^\star$$

をみたす環準同型写像のことである．

定義 3 B を対合 $\star$ をもつ根基環でない可換 Banach 環とする．対合 $\star$ が対称であるとは，任意の $f \in B$ に対して

$$\widehat{f^\star} = \overline{\hat{f}}$$

が成り立つことである．ここに $\hat{}$ は Gelfand 変換，$\bar{}$ は複素共役を表わす．

定義 4 A を根基環でない可換 Banach 環，M_A を A の極大イデアル空間とする．A が正則であるとは，任意の $\varphi \in M_A$ と φ を含まない閉集合 F に対して

$$\hat{f}(\varphi) = 1, \hat{f}(F) = 0$$

をみたす $f \in A$ が存在することをいう．

それでは先程述べた環準同型写像の構造に関する 2 つの結果を紹介する．

定理 1 ([3]) A を対合をもつ可換 Banach 環，B を対称な対合をもつ根基環でない可換 Banach 環，M_B を B の極大イデアル空間とする．このとき $\rho\colon A \to B$ が $*$-環準同型写像ならば，$\rho(\mathrm{rad}A)$ は $\mathrm{rad}B$ に含まれる．よって A が根基環ならば

$$\rho(f)\hat{} = 0 \quad (f \in A)$$

である．A が根基環でないとき M_A を A の極大イデアル空間とする．このとき M_B の分割 $\{M_{-1}, M_0, M_1\}$ と連続写像 $\Phi : M_{-1} \cup M_1 \to M_A$ が存在して

$$\rho(f)\hat{}(\varphi) = \begin{cases} \overline{\hat{f}(\Phi(\varphi))} & \varphi \in M_{-1} \\ 0 & \varphi \in M_0 \\ \hat{f}(\Phi(\varphi)) & \varphi \in M_1 \end{cases}$$

が成り立つ．このとき M_{-1}, M_1 は M_B の開集合である．特に A が単位元をもつときは M_{-1}, M_0, M_1 は全て M_B の開かつ閉集合で，M_{-1}, M_1 はコンパクトである．

定理 2 ([5]) A を正則な可換 Banach 環，B を根基環でない可換 Banach 環，M_A, M_B をそれぞれ A, B の極大イデアル空間とする．このとき $\rho\colon A \to B$ が環準同型写像で，各 $\varphi \in M_B$ に対して

$$\{\rho(f)\hat{}(\varphi) : f \in A\} = \mathbb{C}$$

であるならば M_B の分割 $\{M_{-1}, M_1, M_d\}$ と連続写像 $\Phi\colon M_B \to M_A$ が存在して，さらに M_d の各元 φ に対して不連続な環準同型写像 $\tau_\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が存在して

$$\rho(f)\hat{}(\varphi) = \begin{cases} \overline{\hat{f}(\Phi(\varphi))} & \varphi \in M_{-1} \\ \hat{f}(\Phi(\varphi)) & \varphi \in M_1 \\ \tau_\varphi(\hat{f}(\Phi(\varphi)) & \varphi \in M_d \end{cases}$$

が成り立つ．特に ρ が全射であれば上が成り立つ．

この 2 つの定理は非常にきれいな形になっているが，対合や正則性といった特殊な構造をもつものについての結果である．我々は，より一般の可換 Banach 環に対する環準同型写像の構造を調べたい．そこで 2 つの定理の証明を詳しく見てみると，ともに環準同型写像の核が極大イデアルになるということを示し，そのことが構造を調べる上で重要な役割を果していることに気づく．このことに注意して，次のより一般的な結果を示すことができる．

定理 3 A, B を根基環でない可換 Banach 環，M_A, M_B をそれぞれ A, B の極大イデアル空間とする．$\rho\colon A \to B$ を環準同型写像で任意の $\varphi \in M_B$ に対して次の条件 (m) をみたすとする．

(m) $\mathrm{Ker}\,\rho_\varphi = A$，あるいは $\mathrm{Ker}\,\rho_\varphi$ は A の正則極大イデアルである．

ここに $\mathrm{Ker}\,\rho_\varphi = \{f \in A : \rho(f)\hat{}(\varphi) = 0\}$ とする．このとき M_B の分割 $\{M_{-1}, M_0, M_1, M_d\}$ と連続写像 $\Phi\colon M_B \setminus M_0 \to M_A$ が存在して，さらに M_d の各元 φ に対して不連続な環準同型写像 $\tau_\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が存在して

$$\rho(f)\hat{}(\varphi) = \begin{cases} \overline{\hat{f}(\Phi(\varphi))} & \varphi \in M_{-1} \\ 0 & \varphi \in M_0 \\ \hat{f}(\Phi(\varphi)) & \varphi \in M_1 \\ \tau_\varphi(\hat{f}(\Phi(\varphi)) & \varphi \in M_d \end{cases}$$

をみたす．このとき $M_0, M_{-1} \cup M_0, M_0 \cup M_1$ は M_B の閉集合である．また $\Phi(M_d)$ は高々有限集合である．

注意 1 M_{-1}, M_0, M_1, M_d は non-empty であるとは限らない．また M_d は高々有限集合であるとは限らない．

定理 3 は定理 1 及び定理 2 を含んでいることが分かる．まず定理 1 について考える．つまり $\rho\colon A \to B$ が $*$-環準同型写像であるとする．A が単位元 e をもつとき，各 $\varphi \in M_B$ に対し $\rho_\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を $\rho_\varphi(\lambda) = \rho(\lambda e)\hat{}(\varphi) \quad (\lambda \in \mathbb{C})$ により定義する．このとき ρ_φ は $\mathbb{C}$ 上の $*$-環準同型写像であることが分かる．一方 $\mathbb{C}$ 上の $*$-環準同型写像は $0, z, \bar{z}$ だけであるから，各 $\varphi \in M_B$ に対して条件 (m) が成り立つことが分かる．A が単位元をもたないときは A に単位元を添加した可換 Banach 環を考え，ρ を拡張すればよい．

次に定理 2 について考える．このとき補題 4 により，定理 2 の条件 $\{\rho(f)\hat{}(\varphi) : f \in A\} = \mathbb{C}$ は条件 (m) の十分条件であることが分かる．以上から定理 3 は定理 1，定理 2 を含むことが示された．

定理 3 を示すために次の補題を用いる．

補題 4 A, Bを可換Banach環, A_eをAに単位元eを添加した可換Banach環とする. $\rho\colon A \to B$が0でない環準同型写像ならば, 以下は同値である.

(i) $\mathrm{Ker}\,\rho = \{f \in A : \rho(f) = 0\}$は$A$の正則極大イデアルである.

(ii) 環準同型写像$\tilde{\rho}\colon A_e \to B$で$\tilde{\rho}|_A = \rho, \tilde{\rho}(\mathbb{C}e) = \rho(A)$をみたすのもが存在する.

(iii) $\rho = \tau \circ \psi$となる環同型写像$\tau : \mathbb{C} \to \rho(A)$と$\psi \in M_A$が存在する.

証明 (i) $\Rightarrow$ (ii) 仮定より$\mathrm{Ker}\,\rho$はAの正則極大イデアルなので, $\mathrm{Ker}\,\rho = \mathrm{Ker}\,\varphi$となる$\varphi \in M_A$が存在する. そこで$\tilde{\rho}\colon A_e \to B$を以下で定義する.

$$\tilde{\rho}((f, \lambda)) = \rho(f) + \rho(\varphi^{-1}(\lambda)) \quad ((f, \lambda) \in A_e).$$

このとき$\tilde{\rho}$はwell-definedである. 実際, 任意の$g, h \in \varphi^{-1}(\lambda)$に対して$g - h \in \mathrm{Ker}\,\varphi$である. $\mathrm{Ker}\,\rho = \mathrm{Ker}\,\varphi$より$\rho(g) = \rho(h)$となる. すなわち, $\tilde{\rho}$はwell-definedである. $\mathrm{Ker}\,\rho = \mathrm{Ker}\,\varphi$より$\tilde{\rho}|_A = \rho$は明らかなので, $\tilde{\rho} : A_e \to B$は環準同型写像であることを示す. 実際, 任意の$(f_i, \lambda_i) \in A_e$と$\varphi(g_i) = \lambda_i \quad (i = 1, 2)$をみたす$g_i \in A$に対して

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}((f_1, \lambda_1) + (f_2, \lambda_2)) &= \tilde{\rho}((f_1 + f_2, \lambda_1 + \lambda_2)) \\
&= \rho(f_1 + f_2) + \rho(g_1 + g_2) \\
&= \rho(f_1) + \rho(f_2) + \rho(g_1) + \rho(g_2) \\
&= \tilde{\rho}(f_1, \lambda_1) + \tilde{\rho}(f_2, \lambda_2).
\end{aligned}$$

よって$\tilde{\rho}$は加法的である. また$\lambda_2 = \varphi(g_2)$より

$$\lambda_2 f_1 - g_2 f_1 \in \mathrm{Ker}\,\varphi = \mathrm{Ker}\,\rho$$

に注意すると，

$$\rho(\lambda_2 f_1) = \rho(g_2 f_1) = \rho(g_2)\rho(f_1)$$

であることが分かる．よって

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}((f_1,\lambda_1)(f_2,\lambda_2)) &= \tilde{\rho}((f_1 f_2 + \lambda_2 f_1 + \lambda_1 f_2, \lambda_1\lambda_2)) \\
&= \rho(f_1 f_2 + \lambda_2 f_1 + \lambda_1 f_2) + \rho(g_1 g_2) \\
&= \rho(f_1)\rho(f_2) + \rho(\lambda_2 f_1) \\
&\qquad\qquad + \rho(\lambda_1 f_2) + \rho(g_1)\rho(g_2) \\
&= \rho(f_1)\rho(f_2) + \rho(g_2)\rho(f_1) \\
&\qquad\qquad + \rho(g_1)\rho(f_2) + \rho(g_1)\rho(g_2) \\
&= \{\rho(f_1) + \rho(g_1)\}\{\rho(f_2) + \rho(g_2)\} \\
&= \tilde{\rho}((f_1,\lambda_1))\tilde{\rho}((f_2,\lambda_2)).
\end{aligned}$$

すなわち $\tilde{\rho}$ は乗法的である．以上より $\tilde{\rho}$ は環準同型写像であることが示された．最後に $\tilde{\rho}(\mathbb{C}e) = \rho(A)$ を示す．$\tilde{\rho}(\mathbb{C}e) \subset \rho(A)$ は明らかなので，逆を示せばよい．そこで任意の $f \in A$ に対して $\lambda = \varphi(f)$ とおく．このとき

$$\rho(f) = \tilde{\rho}(0,\lambda) \in \tilde{\rho}(\mathbb{C}e)$$

が成り立つ．よって $\rho(A) \subset \tilde{\rho}(\mathbb{C}e)$ である．以上より $\tilde{\rho}(\mathbb{C}e) = \rho(A)$ が示された．

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $\tilde{\rho} : A_e \to B$ を $\tilde{\rho}|_A = \rho, \tilde{\rho}(\mathbb{C}e) = \rho(A)$ をみたす環準同型写像とする．$\tilde{\rho}_e$ を $\tilde{\rho}$ の

$\mathbb{C}$ への制限とする．すなわち，

$$\tilde{\rho}_e(\lambda) = \tilde{\rho}(\lambda e) \quad (\lambda \in \mathbb{C})$$

である．このとき $\tilde{\rho}_e$ は $\mathbb{C}$ から $\rho(A)$ への環同型写像である．実際，定義より $\tilde{\rho}_e$ が環準同型写像であることは明らか．よって $\tilde{\rho}_e$ の全単射性を示せばよい．$\tilde{\rho}(\mathbb{C}e) = \rho(A)$ より $\tilde{\rho}_e$ は全射である．次に単射であることを示す．そこで $\tilde{\rho}_e$ は単射でないと仮定する．このとき $\lambda_1 \neq \lambda_2$ かつ $\tilde{\rho}_e(\lambda_1) = \tilde{\rho}_e(\lambda_2)$ をみたす $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ が存在する．$\lambda_3 = \lambda_1 - \lambda_2$ とおく．このとき $\tilde{\rho}$ は ρ の拡張なので，任意の $f \in A$ に対して

$$\rho(f) = \tilde{\rho}_e(\lambda_3)\rho\Big(\frac{f}{\lambda_3}\Big) = 0$$

である．これは ρ が 0 でないことに反する．よって $\tilde{\rho}_e$ は単射であることが示された．以上より $\tilde{\rho}_e : \mathbb{C} \to \rho(A)$ は環同型写像であることが示された．よって環同型写像 $\tilde{\rho}_e{}^{-1} : \rho(A) \to \mathbb{C}$ が存在する．$\varphi = \tilde{\rho}_e{}^{-1} \circ \tilde{\rho}$ とおく．このとき $\varphi \in M_{A_e}$ であることが分かる．実際，φ が A_e 上の 0 でない環準同型写像であることは定義より明らか．そこで任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して

$$\varphi(\lambda e) = \tilde{\rho}_e{}^{-1} \circ \tilde{\rho}(\lambda e) = \tilde{\rho}_e{}^{-1}(\tilde{\rho}_e(\lambda)) = \lambda$$

に注意すれば，任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ と $f \in A_e$ に対して

$$\varphi(\lambda f) = \varphi(\lambda e)\varphi(f) = \lambda\varphi(f)$$

であることが分かる．すなわち，$\varphi \in M_{A_e}$ である．このとき $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_e \circ \varphi$ より $\rho = \tilde{\rho}_e \circ (\varphi|_A)$ である．$\psi = \varphi|_A$ とおけば，ρ が 0 でないことより ψ も 0 でないことが分かる．以上より $\psi \in M_A$ が示された．

(iii) $\Rightarrow$ (i) ρは環準同型写像なので，任意の$f,g\in\mathrm{Ker}\,\rho$, $h\in A$に対して$f+g,fh\in\mathrm{Ker}\,\rho$は明らか．そこで任意の$\lambda\in\mathbb{C}$と$f\in\mathrm{Ker}\,\rho$に対して$\lambda f\in\mathrm{Ker}\,\rho$を示す．仮定より$\rho=\tau\circ\psi$なので

$$\rho(\lambda f)=\tau(\lambda\psi(f))=\tau(\lambda)\tau(\psi(f))=\tau(\lambda)\rho(f)=0.$$

すなわち，$\lambda f\in\mathrm{Ker}\,\rho$が示された．以上より$\mathrm{Ker}\,\rho$は$A$のイデアルであることが示された．$\rho$は0ではないので$\mathrm{Ker}\,\rho\neq A$．また$\mathrm{Ker}\,\psi\subset\mathrm{Ker}\,\rho$であるが，$\mathrm{Ker}\,\psi$は$A$の正則極大イデアルなので$\mathrm{Ker}\,\rho=\mathrm{Ker}\,\psi$である．すなわち，$\mathrm{Ker}\,\rho$は$A$の正則極大イデアルである．■

定理3の証明 各$\varphi\in M_B$に対して$\rho_\varphi\colon A\to\mathbb{C}$を次で定義する:

$$\rho_\varphi(f)=\rho(f)\hat{}(\varphi)\quad(f\in A).$$

ここに$\hat{}$はGelfand変換である．このとき条件(m)より各$\varphi\in M_B$に対して$\mathrm{Ker}\,\rho_\varphi=A$または$\mathrm{Ker}\,\rho_\varphi$は$A$の正則極大イデアルである．まず$M_0=\{\varphi\in M_B:\rho_\varphi=0\}$とおく．このとき$M_0$が閉集合であることが分かる．任意の$\varphi\in M_B\setminus M_0$に対して$\mathrm{Ker}\,\rho_\varphi$は$A$の正則極大イデアルとなる．補題4より各$\varphi\in M_B\setminus M_0$に対して環準同型写像$\tau_\varphi\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$と$\psi_\varphi\in M_A$が存在して$\rho_\varphi=\tau_\varphi\circ\psi_\varphi$となる．そこで$M_{-1},M_1,M_d$を以下のように定める．

$$\begin{aligned}M_{-1}&=\{\varphi\in M_B:\tau_\varphi(\lambda e)=\bar{\lambda}\quad(\lambda\in\mathbb{C})\}\\M_1&=\{\varphi\in M_B:\tau_\varphi(\lambda e)=\lambda\quad(\lambda\in\mathbb{C})\}\\M_d&=\{\varphi\in M_B:\tau_\varphi(\lambda e)\ is\ discontinuous\ on\ \mathbb{C}\}.\end{aligned}$$

このとき$\{M_{-1},M_0,M_1,M_d\}$はM_Bの分割である．そこで各$\varphi\in M_B\setminus M_0$に対して$\psi_\varphi\in M_A$

を対応させる写像を Φ とすると

$$\rho(f)\hat{}(\varphi) = \begin{cases} \overline{\hat{f}(\Phi(\varphi))} & \varphi \in M_{-1} \\ 0 & \varphi \in M_0 \\ \hat{f}(\Phi(\varphi)) & \varphi \in M_1 \\ \tau_\varphi(\hat{f}(\Phi(\varphi)) & \varphi \in M_d. \end{cases}$$

が成り立つ．このとき $\Phi(M_d)$ が高々有限集合であることが [1, Lemma 2] と全く同様にして示される．$\Phi(M_d) = \{\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n\}$ とすると各 $j = 1, 2, \cdots, n$ に対して $\{\varphi \in M_d : \Phi(\varphi) = \psi_j\}$ は M_B の開集合となる．したがって Φ は M_d の各点で連続である．最後に Φ は $M_{-1} \cup M_1$ の各点で連続であることを示す．$M_{-1} \cup M_0, M_0 \cup M_1$ は M_B の閉集合であることに注意する．任意の $\varphi \in M_1$ に対し φ に収束する net$\{\varphi_\alpha\} \subset M_B \setminus M_0$ をとる．$M_{-1} \cup M_0$ は M_B の閉集合なので，$\{\varphi_\alpha\} \subset M_1 \cup M_d$ として一般性を失わないのでそうする．このとき $\alpha \geq \alpha_0$ ならば $\varphi_\alpha \in M_1$ であるような α_0 が存在する．実際そうでないと仮定すると，任意の α に対して α' が存在して $\varphi_{\alpha'} \in M_d$ となる．ところが $\Phi(M_d)$ は高々有限集合なので，$\{\Phi(\varphi_{\alpha'}) : \varphi_{\alpha'} \in M_d\}$ も高々有限集合となり，$\{\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_k\}$ とかける．このとき $\hat{g}(\psi_1) = \hat{g}(\psi_2) = \cdots = \hat{g}(\psi_k) = 0$ であり，$\hat{g}(\Phi(\varphi)) = 1$ をみたす $g \in A$ が存在する．

$$\rho(g)\hat{}(\varphi_{\alpha'}) = \tau_{\varphi_{\alpha'}}(\hat{g}(\Phi(\varphi_{\alpha'}))) = 0,$$

$$\rho(g)\hat{}(\varphi) = \hat{g}(\Phi(\varphi)) = 1$$

であるから，これは $\rho(g)\hat{}(\varphi_\alpha) \to \rho(g)\hat{}(\varphi)$ に反する．以上より $\alpha \geq \alpha_0$ ならば $\varphi_\alpha \in M_1$ であるような α_0 の存在が示された．このとき任意の $f \in A$ に対して

$$\hat{f}(\Phi(\varphi_\alpha)) = \rho(f)\hat{}(\varphi_\alpha) \to \rho(f)\hat{}(\varphi) = \hat{f}(\Phi(\varphi))$$

であるから，Φ は $\varphi \in M_1$ で連続である．すなわち Φ は M_1 の各点で連続である．まったく同様にして Φ の M_{-1} 上での連続性も示される．■

参考文献

[1] O. Hatori and J. Wada, *A characterization of ring derivations on function algebras*, Bull. Tokyo Med. Coll., No. 17 (1991), 19-22.

[2] H. Kestelman, *Automorphisms of the field of complex numbers*, Proc. London Math. Soc. (2) **53** (1951), 1-12.

[3] T. Miura, *Star ring homomorphisms between commutative Banach algebras*, to appear in Proc. Amer. Math. Soc.

[4] P. Šemrl, *Non linear perturbations of homomorphismson C(X)*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **50** (1999), 87-109.

[5] S.-E. Takahasi and O. Hatori, *A structure of ring homomorphisms on commutative Banach algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999) no. 8, 2283-2288.